УДК 512.554.31
DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-5

М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко

ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА $\overline{A_5}$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Классификация простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики *p=2* к настоящему времени не завершена. Деформации алгебр Ли позволяют получать примеры новых простых алгебр Ли. Целью работы является описание структуры пространства локальных деформаций как модуля над группой автоморфизмов *Aut L.*

Материалы и методы. Применяются методы теории деформаций и техника, основанная на изучении орбит действия группы автоморфизмов алгебры Ли на пространстве ее локальных деформаций.

Результаты. Найдено описание пространства локальных деформаций алгебры Ли $\overline{A_5}$ как фактормодуля в $\Lambda^3 V \otimes \Lambda^3 V$ для стандартного 6-мерного $SL(6)$-модуля *V*.

Выводы. Глобальные деформации алгебры Ли $\overline{A_5}$ дают новую простую 34-мерную алгебру Ли характеристики 2.

Ключевые слова: модулярные алгебры Ли, группа когомологий, деформации алгебр Ли.

M. I. Kuznetsov, N. G. Chebochko

LIE ALGEBRA DEFORMATIONS OF TYPE $\overline{A_5}$ IN CHARACTERISTIC 2

Abstract.

Background. The classification of simple Lie algebras over an algebraically closed field of characteristic *p* = 2 is not complete by now. Deformations of Lie algebras make it possible to obtain examples of new simple Lie algebras. The goal of the paper is to describe the structure of the space of local deformations as a module over automorphism group *Aut L*.

Methods. Methods of deformation theory and a technique based on the study of the orbits of the action of the automorphism group of Lie algebra on the space of its local deformations are applied.

Results. We find a description of the space of the local deformations of lie algebra as a quotient of the module in the standard 6-dimensional-module.

Conclusions. The global deformation deformations of Lie algebra give a new simple 34-dimensional Lie algebra of characteristic 2.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №18-01-00900, и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 г.

Keywords: modular lie algebras, cohomology group, deformations of Lie algebras.

Введение

Классические алгебры Ли над полями нулевой характеристики и характеристики $p > 3$ являются жесткими [1]. Над полем характеристики 2 и 3 классические алгебры Ли имеют нетривиальные деформации. В работах [2, 3] доказано, что над полем характеристики $p > 2$ глобальные деформации имеет только алгебра Ли типа C_2, их описание дано в работах [4, 5]. Пространства локальных деформаций классических алгебр Ли с однородной системой корней над полем характеристики 2 найдены в [6]. В характеристике 2 в сериях A_n и $\overline{A_n}$ пространство локальных деформаций нетривиально только для алгебр Ли типа $\overline{A_3}$ и $\overline{A_5}$. Глобальные деформации $\overline{A_3}$ описаны в работе [7].

В данной работе исследуются глобальные деформации алгебры Ли типа $\overline{A_5}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2.

Используется техника, развитая в работе [5], основанная на изучении орбит действия группы автоморфизмов алгебры Ли на пространстве ее локальных деформаций. Коциклы $H^2(L,L)$ из одной орбиты дают эквивалентные деформации.

Введем основные определения. Пусть $A = K((t))$ – поле частных кольца степенных рядов от переменной t; L – алгебра Ли над полем K, $L_A = L \otimes_K A$. Если билинейное отображение $f_t : L_A \times L_A \to L_A$ вида $f_t(x,y) = [x,y] + tF_1(x,y) + t^2 F_2(x,y) + \cdots$ (где F_i – K-билинейные отображения) удовлетворяет условию антисимметричности и условию Якоби, то алгебры Ли L_A с умножением f_t являются семейством глобальных деформаций алгебры Ли L. Условия, накладываемые на отображение f_t, означают, в частности, что отображение F_1 принадлежит $Z^2(L,L)$. Когомологичные коциклы дают эквивалентные деформации, поэтому для нахождения деформаций рассматривают пространство локальных деформаций $H^2(L,L)$.

1. Пространство локальных деформаций

Пусть L – алгебра Ли типа $\overline{A_5}$ над полем характеристики 2; $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ \alpha_4, \alpha_5\}$ – базис системы корней R типа A_5, $\{H_{\alpha_i}\ (i = 1,...,5)$, $E_\alpha (\alpha \in R)\}$ – базис Шевалле в L.

В работе [6] доказана

Теорема 1. Пространство локальных деформаций $H^2(L,L)$ имеет размерность 20. Веса $H^2(L,L)$ имеют одну орбиту относительно действия группы Вейля. Весовые пространства одномерны, веса сопряжены с $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$ и имеют вид $\beta + \gamma + \delta$ – сумма трех попарно ортогональных корней.

Найдем базис в $H^2(L,L)$. Все веса $H^2(L,L)$ сопряжены, поэтому достаточно найти базисный вектор в $H^2_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5}(L,L)$. Так как $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5$ нельзя представить в виде суммы двух корней (положительные корни в A_n – суммы по связным подмножествам графа Дынкина), то $B^2_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5}(L,L)=0$. Вес $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5$ представляется в виде суммы трех корней следующими способами:

$$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5,\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)+(-\alpha_2)+(-\alpha_4),$$

$$(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)+(-\alpha_4)+(\alpha_1),$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)+(-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_3),$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(-\alpha_2)+(\alpha_5),$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)+(-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4).$$

Базисным коциклом в $Z^2_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5}(L,L)$ является ψ_1, где

$$\psi_1=\sum_{\beta+\gamma+\delta=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5} E^*_{-\beta}\wedge E^*_{-\gamma}\otimes E_\delta .$$

Когомологические классы, лежащие в одной орбите относительно действия группы автоморфизмов, дают изоморфные алгебры Ли. Поэтому важно найти удобное описание $H^2(L,L)$ как модуля над группой автоморфизмов алгебры Ли L.

Пусть V – стандартный 6-мерный $SL(6)$-модуль с базисом $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$; L – алгебра Ли типа $\overline{A_5}$ характеристики 2, т.е. L – факторалгебра $\{\varphi\in V^*\otimes V \mid \mathrm{tr}\varphi=0\}$ по центру. Черту для обозначения смежных классов в факторалгебре писать не будем.

Рассмотрим пространство $\Lambda^3V^*\otimes\Lambda^3V$ и подпространство $U=<f\wedge g\wedge h\otimes v\wedge w\wedge u \mid f,g,h(v,u,w)=0>$. Элементу $v=v_s\wedge v_t\wedge v_r\in\Lambda^3V$ соответствует 3-мерное подпространство $W\in Gr(3,V)$ и $W^0=Ann_{V^*}(W)\in Gr(3,V^*)$. Подпространство U натянуто на элементы $g\otimes v$, где $v\in\Lambda^3V$, $g=g^1\wedge g^2\wedge g^3$, где $<g^1,g^2,g^3>=W^0$.

Так как Λ^6V – одномерный тривиальный модуль над $SL(V)$, то на Λ^3V определена невырожденная инвариантная кососимметрическая форма (спаривание $\Lambda^3V\times\Lambda^3V\to\Lambda^6V$). Следовательно $\Lambda^3V\cong(\Lambda^3V)^*\cong\Lambda^3V^*$. Таким образом, определен изоморфизм $\Phi:\Lambda^3V^*\to\Lambda^3V$, причем $\Phi(f^i\wedge f^j\wedge f^k)=e_s\wedge e_t\wedge e_r$, где $\{i,j,k,s,t,r\}=\{1,\ldots,6\}$.

Получаем, что $\Lambda^3 V^* \otimes \Lambda^3 V \cong \Lambda^3 V \otimes \Lambda^3 V$ как $SL(V)$ модули и U изоморфен $< w \otimes w, w \in \Lambda^3 V >$. Пусть $\{w_1, ..., w_{20}\}$ – базис $\Lambda^3 V$, обозначим через U_1 подмодуль в U:

$$U_1 = < w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \mid i \neq j >, \; \overline{U} = U / U_1 = < \overline{w_i \otimes w_i}, i = 1, ..., 20 > .$$

Теорема 2. $H^2(L, L) \cong \overline{U}$ – изоморфизм модулей над $Aut(L)$.

Доказательство.

Пусть $\{f^i, i = 1, ..., 6\}$ – двойственный базис к $\{e_i, i = 1, ..., 6\}$.

Определим $F : \Lambda^3 V^* \otimes \Lambda^3 V \to C^2(L, L)$ по правилу $F(g_1 \wedge g_2 \wedge g_3 \otimes v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \psi$, где

$$\psi(g \otimes v, h \otimes u) = \begin{vmatrix} g_1(v) & g_1(u) & g_1 \\ g_2(v) & g_2(u) & g_2 \\ g_3(v) & g_3(u) & g_3 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} g(v_1) & h(v_1) & v_1 \\ g(v_2) & h(v_2) & v_2 \\ g(v_3) & h(v_3) & v_3 \end{vmatrix} .$$

Прямая проверка показывает, что для базисных векторов $f^i \wedge f^j \wedge f^k \otimes e_s \wedge e_t \wedge e_r$, где i, j, k, s, t, r – различны, отображение $F(f^i \wedge f^j \wedge f^k \otimes e_s \wedge e_t \wedge e_r)$ является коциклом. Например: $F(f^2 \wedge f^4 \wedge f^6 \otimes e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = \psi_1$ (определено выше).

При проверке того, что $F(f^i \wedge f^j \wedge f^k \otimes e_s \wedge e_t \wedge e_r)$ является коциклом на векторах $f^s \otimes e_i$, $f^t \otimes e_j$, $f^r \otimes e_k$, получим

$$d\psi(f^s \otimes e_i, f^t \otimes e_j, f^r \otimes e_k) = [\psi(f^s \otimes e_i, f^t \otimes e_j), f^r \otimes e_k] +$$

$$+ [\psi(f^s \otimes e_i, f^r \otimes e_k), f^t \otimes e_j] + [\psi(f^r \otimes e_k, f^t \otimes e_j), f^s \otimes e_i] =$$

$$= [f^k \otimes e_r, f^r \otimes e_k] + [f^j \otimes e_t, f^t \otimes e_j] + [f^i \otimes e_s, f^s \otimes e_i] =$$

$$= f^k \otimes e_k + f^r \otimes e_r + f^j \otimes e_j + f^t \otimes e_t + f^i \otimes e_i + f^s \otimes e_s = 0$$

в факторалгебре $\overline{A_5}$. В факторалгебрах $\overline{A_n}$ при $n > 5$ элемент $f^k \otimes e_k + f^r \otimes e_r + f^j \otimes e_j + f^t \otimes e_t + f^i \otimes e_i + f^s \otimes e_s \neq 0$, поэтому данная конструкция работает только при $n = 5$.

F перестановочно с действием $Aut(L)$.

Базисными векторами в $\overline{U}$ являются образы векторов $f^i \wedge f^j \wedge f^k \otimes e_s \wedge e_t \wedge e_r$, где $\{i, j, k\}$ выборка трех элементов из $\{1, ..., 6\}$, $\{s, t, r\}$ – оставшиеся три, $\dim \overline{U} = 20 = \dim H^2(L, L)$. □

Рассмотрим модуль однородных многочленов второй степени в разделенных степенях от переменных w_i и подмодуль $< w_i w_j, i \neq j >$. Фактормодуль изоморфен $< w_i^{(2)}, i=1,...,20 >$ – модуль, состоящий из смежных классов элементов $w^{(2)}$, $< w_i^{(2)}, i=1,...,20 > \cong \overline{U}$.

2. Интегрируемость коциклов

Будем называть коцикл ψ из $H^2(L,L)$ интегрируемым, если он продолжается до глобальной деформации алгебры Ли L. Соответствующий коциклу ψ вектор из $\Lambda^3 V^* \otimes \Lambda^3 V$ также будем называть интегрируемым. Необходимым условием и интегрируемости коцикла ψ является тривиальность коцикла $\psi \cup \psi$ из $Z^3(L,L)$, где

$$(\psi_1 \cup \psi_2)(x,y,z) = \psi_1(\psi_2(x,y),z) + \psi_1(\psi_2(y,z),x) + \psi_1(\psi_2(z,x),y).$$

Определим также коциклы $[\psi_1,\psi_2] = \psi_1 \cup \psi_2 + \psi_2 \cup \psi_1$. Из определения естественного действия $Aut(L)$ на $Z^k(L,L)$ сразу следует, что $g[\psi_1,\psi_2] = [g\psi_1, g\psi_2]$ для любого $g \in Aut(L)$.

Для весовых базисных векторов ψ из $H^2(L,L)$ выполняется $\psi \cup \psi = 0$. Это достаточно проверить для коцикла ψ_1. Коцикл ψ_1 имеет вес $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$. Поэтому если $\psi_1(\psi_1(E_\beta, E_\gamma), E_\delta) \neq 0$, то $\beta + \gamma + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$, $\beta + \gamma + \delta + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5$ являются корнями.

Так как положительные корни в R – это суммы с коэффициентом 1 по связным подмножествам графа Дынкина, то условие $\beta + \gamma + \delta + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5$ означает, что минимум 2 из корней β, γ, δ отрицательны (например, $\beta, \gamma < 0$) и имеют ненулевой коэффициент при α_1. Если третий корень положителен, то так как в сумме $\beta + \gamma + \delta + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5$ коэффициенты меньше или равны 1, то два отрицательных корня должны содержать и α_1 и α_5, а значит, $\beta = \gamma = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5$. Тогда $\beta + \gamma + \delta + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5 = \delta - 2\alpha_2 - 2\alpha_4$ не является корнем ни для какого δ. Аналогично, если третий корень отрицателен, то $\beta + \gamma + \delta + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5$ также не является корнем. Поэтому $\psi_1(\psi_1(E_\beta, E_\gamma), E_\delta) = 0$ для любых $\beta, \gamma, \delta \in R$.

Таким образом, каждый базисный весовой коцикл ψ из $H^2(L,L)$ является интегрируемым и отображение $f_t = [\ ,\ ] + t\psi$ удовлетворяет условию Якоби и антисимметричности. Так как базисные весовые векторы находятся в одной орбите относительно действия группы Вейля, то алгебры, определенные умножением $f_t = [\ ,\ ] + t\psi_i$, все изоморфны алгебре с умножением $f_t = [\ ,\ ] + t\psi_1$, где $F(f^2 \wedge f^4 \wedge f^6 \otimes e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = \psi_1$. Вектор $t\, f^2 \wedge f^4 \wedge f^6 \otimes e_1 \wedge e_3 \wedge e_5$ находится в одной орбите с вектором $f^2 \wedge f^4 \wedge f^6 \otimes e_1 \wedge e_3 \wedge e_5$. Поэтому все алгебры в семействе алгебр с умножением $f_t = [\ ,\ ] + t\psi_1$ изоморфны алгебре L_1 с умножением $[\ ,\ ] + \psi_1$.

Так как $\psi_1(E_\beta, E_\gamma) = E_\delta$ только для ортогональных β, γ, δ, то $\psi_1(E_\beta, E_\gamma) \neq 0$ только, если $[E_\beta, E_\gamma] = 0$. Поэтому на базисных векторах умножение в L_1 либо совпадает с умножением в L либо равно значению коцикла ψ_1 на этих векторах. Поэтому из простоты и ограниченности алгебры Ли типа $\overline{A_5}$ следует, что L_1 – ограниченная простая алгебра Ли.

Библиографический список

1. **Рудаков, А. Н.** Деформации простых алгебр Ли / А. Н. Рудаков // Известия Академии наук СССР. Сер.: Математика. – 1971. – Т. 35. – С. 1113–1119.
2. **Кузнецов, М. И.** Деформации классических алгебр Ли / М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко // Математический сборник. – 2000. – Т. 191, № 8. – С. 69–88.
3. **Кириллов, С. А.** О деформациях алгебры Ли типа G_2 характеристики три / С. А. Кириллов, М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко // Известия вузов. Математика. – 2000. – Т. 454, № 3. – С. 33–38.
4. **Кострикин, А. И.** Параметрическое семейство простых алгебр Ли / А. И. Кострикин // Известия Академии наук СССР. Сер.: Математика. – 1970. – Т. 34. – С. 744–756.
5. **Кострикин, А. И.** О деформациях классических алгебр Ли характеристики три / А. И. Кострикин, М. И. Кузнецов // Доклады Российской Академии наук. – 1995. – Т. 343, № 3. – С. 299–301.
6. **Чебочко, Н. Г.** Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. I / Н. Г. Чебочко // Математический сборник. – 2005. – Т. 196, № 9. – С. 125–156.
7. **Chebochko, N. G.** Integrable cocycles and global deformations of Lie algebra of type G_2 in characteristic 2 / N. G. Chebochko, M. I. Kuznetsov // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 7. – P. 2969–2977.

References

1. Rudakov A. N. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Ser.: Matematika* [Bulletin of USSR Academy of Sciences. Series: Mathematics]. 1971, vol. 35, pp. 1113–1119. [In Russian]
2. Kuznetsov M. I., Chebochko N. G. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collected articles]. 2000, vol. 191, no. 8, pp. 69–88. [In Russian]
3. Kirillov S. A., Kuznetsov M. I., Chebochko N. G. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2000, vol. 454, no. 3, pp. 33–38. [In Russian]
4. Kostrikin A. I. *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika* Bulletin of USSR Academy of Sciences. Series: Mathematics]. 1970, vol. 34, pp. 744–756. [In Russian]
5. Kostrikin A. I., Kuznetsov M. I. *Doklady Rossiyskoy Akademii nauk* [Reports of Russian Academy of Sciences]. 1995, vol. 343, no. 3, pp. 299–301. [In Russian]
6. Chebochko N. G. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collected articles]. 2005, vol. 196, no. 9, pp. 125–156. [In Russian]
7. Chebochko N. G., Kuznetsov M. I. *Communications in Algebra*. 2017, vol. 45, no. 7, pp. 2969–2977.

Кузнецов Михаил Иванович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: kuznets-1349@yandex.ru

Kuznetsov Mikhail Ivanovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of algebra, geometry and discret mathematics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, Russia)

Чебочко Наталья Георгиевна
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12)

E-mail: nchebochko@hse.ru

Chebochko Natal'ya Georgievna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of fundamental mathematics, National Research University "Higher School of Economics" (25/12 Bolshaya Pecherskaya street, Nizhny Novgorod, Russia)

Образец цитирования:

Кузнецов, М. И. Деформации алгебры Ли типа $\overline{A_5}$ в характеристике 2 / М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 1 (49). – С. 49–55. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-5.